Ministerio de Educación

Gobierno de Chile

3° medio

Unidad 0: Matemática - N°5

¡Aprendo sin parar!

Guía de ejercicios

Estimado estudiante:
El desarrollo de las actividades de esta guía te permitirán distinguir conceptos tales como el área de una superficie y el volumen de un cuerpo geométrico, en especial la esfera. Al finalizar la guía habrás descubierto las fórmulas para encontrar el área de la superficie y el volumen de una esfera.

Objetivo de la Clase: Deducir las fórmulas del área de la superficie y el volumen de una esfera[1].

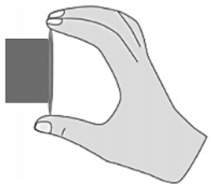
1. Este Objetivo está relacionado al OA 7 de segundo medio, que señala lo siguiente "Desarrollar las fórmulas del área de la superficie y del volumen de la esfera" y en particular a lo relacionado con "-Conjeturando la fórmula".

Soluciones

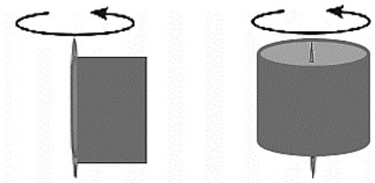
Actividad N°1

Realiza la siguiente actividad usando un trozo de cartulina y un palito (puede ser de helado, mondadientes):

1. Corta un rectángulo de cualquier dimensión y pégala en el palillo tal como se muestra en la figura:



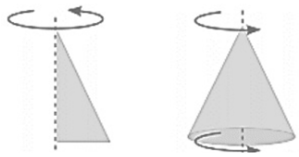
2. Haz girar dicho rectángulo:



   a. ¿Qué cuerpo geométrico se observa? Se generará un cilindro

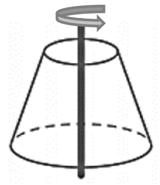
   b. ¿Qué cuerpo geométrico crees que se observe al hacer girar un triángulo rectángulo sobre uno de sus catetos? Realiza el ejercicio usando la cartulina y el palillo, luego registra en el siguiente recuadro la figura que usaste y el cuerpo que se forma.

Se forma un cono



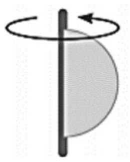
c. ¿Qué figura geométrica se podría utilizar para formar el siguiente cuerpo geométrico (cono truncado)?

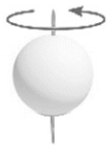
Se puede generar con la mitad de un trapecio isósceles.



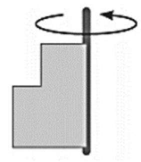
d. Dibuja el cuerpo geométrico que generan las siguientes figuras geométricas al hacerlas girar sobre su eje. Usa la cartulina y el palillo para averiguarlo.

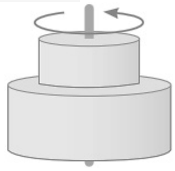
Semicírculo genera _________________ esfera



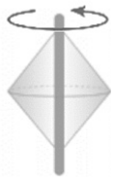


Rectángulos diferentes genera ___________ Cilindros de distintos diámetros

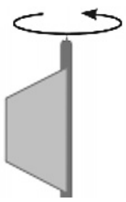




Triángulo isósceles genera____________ Dos conos unidos por su base

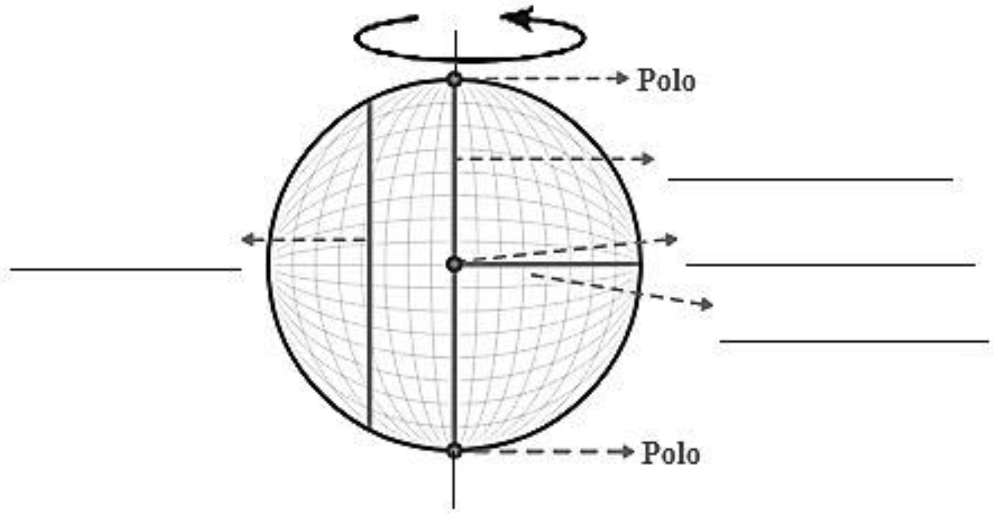


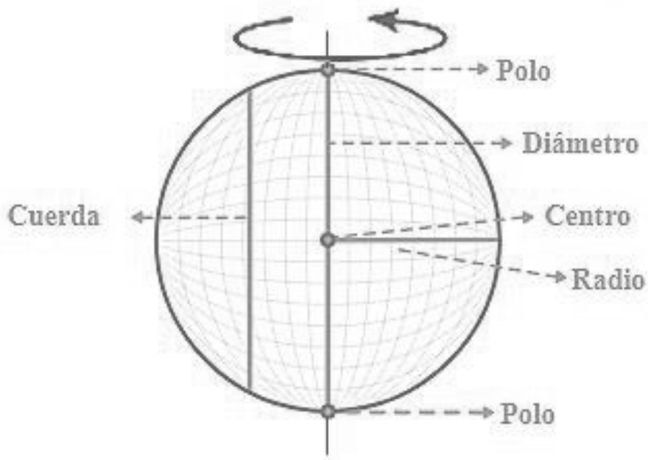
Trapecio genera ____________ cono en los extremos y cilindro central



Actividad N° 2

1. Completa y define cada elemento de la esfera que se muestra a continuación:





Polo: puntos donde la esfera se intersecta con el eje de rotación.
Diámetro: segmento que une dos puntos de la esfera pasando por el punto centro.
Centro: punto interior que se encuentra a igual distancia de cualquier punto de la esfera.
Radio: distancia del punto centro de la esfera a cualquier punto de ella.
Cuerda: segmento que une dos puntos cualesquiera de la esfera.

2. El área de una esfera se calcula utilizando la fórmula

$$A = 4\pi r^2$$

a. En Costa Rica hay unas piedras milenarias con forma esférica

https://lh3.googleusercontent.com/proxy/oPbl4BiEoz9-hjYU_hIYp2PIZ0kknLHVeE3yTcZfCaePBawP0bvh31QYLURqih6tOPFqfNye7yiakqB5Ed9geqNUBOs6cGclBJD2r45i2OAD

Sus dimensiones oscilan entre los 10 centímetros y los 2,57 metros de diámetro.

- Calcula el área de las esferas de menor y de las esferas de mayor diámetro. Utiliza π= 3,14.

Respuesta:

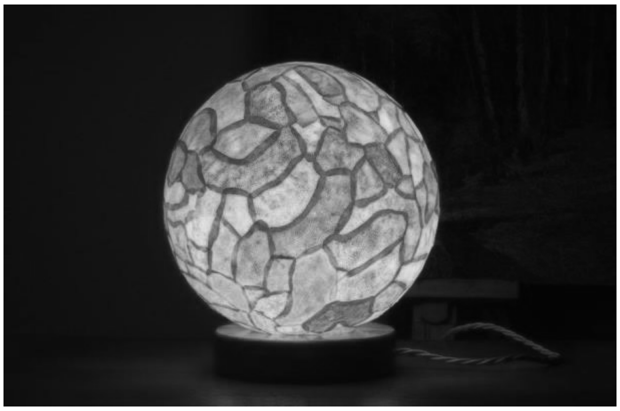
Área de las esferas de menor diámetro

$$A = 4\pi(5cm)^2 \cong 314\ cm^2$$

Área de las esferas de mayor diámetro

$$A = 4\pi(1{,}285m)^2 \cong 20{,}74\ m^2$$

b. Existen manualidades que utilizan técnicas para trabajar con la cáscara de naranja. Una de las aplicaciones que se encuentran en internet es una lámpara de cáscaras de naranja, como se muestra en la siguiente imagen:



https://www.google.com/url?sa=i&url=https%3A%2F%2Fwww.bioguia.com%2Fhogar%2F8-ideas-para-hacer-con-cascaras-de-naranja_29288173.html&psig=AOvVaw1nllf7S83gSFAeVnnPwqtJ&ust=1582926220693000&source=images&cd=vfe&ved=0CAIQjRxqFwoTCPCn7vXZ8ucCFQAAAAAdAAAAABAE

- ¿Cuántas cáscaras de naranjas se necesitan para cubrir una lampara de 25 cm de diámetro? Considera que el diámetro de una naranja es de aproximadamente 8 centímetros. Utiliza π= 3,14.

Respuesta:

El área de la lámpara es:

$$A = 4\pi(12{,}5cm)^2 \cong 1\,963\ cm^2$$

El área de cada naranja es:

$$A = 4\pi(8cm)^2 \cong 200{,}96\ cm^2$$

Cantidad de naranjas: x

$$1\,963\ cm^2 = x \cdot 200{,}96\ cm^2$$

$$\frac{7\,850\ cm^2}{200{,}96\ cm^2} = x$$
$$9{,}76 = x$$

Respuesta: se necesitan aproximadamente 10 naranjas.

3. Considera la esfera como un sólido formado por una gran cantidad de pequeñas pirámides iguales con vértice coincide con el centro de la esfera. La base de cada una de las pirámides es muy pequeña, por lo tanto, podemos considerarla plana y aplicar la fórmula del volumen de una pirámide, tal como se muestra en las siguientes imágenes:

- ¿Cómo es la suma de los volúmenes de las pirámides con el volumen de la esfera?

  Prácticamente iguales, pero esto ocurre siempre que sean muchas pequeñas pirámides.

- Determina el volumen de la esfera de radio r y centro O considerando la situación anterior.

Si el volumen de cada una de las pequeñas pirámides se puede calcular así:

$$V_{pirámide} = \frac{1}{3} \cdot área\ base \cdot h,$$

donde la altura (*h*) equivale al radio (*r*) de la esfera

$$V_{pirámide} = \frac{1}{3} \cdot área\ base \cdot r$$

Como la esfera está formada por esas pequeñas pirámides, podemos decir que su volumen es igual a la suma de los volúmenes de las pirámides, es decir:

$$V_{esfera} = \frac{área\ basal\ \cdot altura}{3} + \frac{área\ basal\ \cdot altura}{3} + \cdots + \frac{área\ basal\ \cdot altura}{3}$$

$$V_{esfera} = (área\ basal + área\ basal + \cdots + área\ basal) \cdot \frac{radio}{3}$$

$$V_{esfera} = área\ de\ la\ esfera \cdot \frac{radio}{3}$$

$$V_{esfera} = 4\pi r^2 \cdot \frac{r}{3} = \frac{4\pi r^3}{3}$$

Chequeo de la comprensión

¿Cuánto mide el área de una esfera si el radio mide 6 cm?

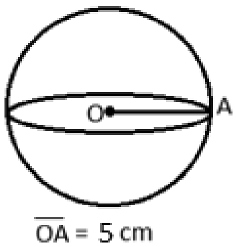
a) 144π cm^2
b) 36π cm^2
c) 24π cm^2
d) 9π cm^2

Clave a)

Actividad N° 3

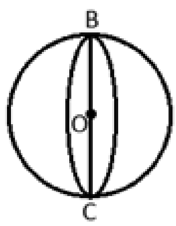
Resuelve los siguientes ejercicios:

1. Determina el área de las siguientes esferas de centro O, dados los siguientes datos, , trabaja con π expresado con su símbolo NO como número:



$\overline{OA} = 5$ cm

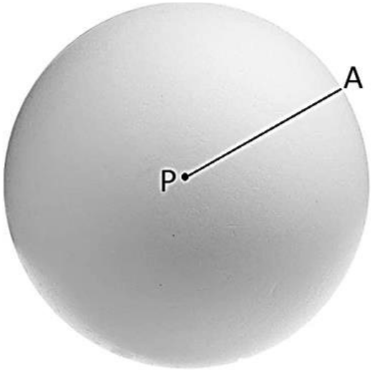
Solución: 100π cm^2



$\overline{BC} = 8$ cm

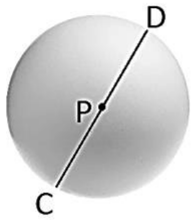
Solución: 64π cm^2

2. Determina el volumen de las siguientes esferas de centro P, dados los siguientes datos, , trabaja con π expresado con su símbolo NO como número:



$\overline{PA} = 6$ cm

Solución: 288π cm^3



$\overline{CD} = 6$ cm

Solución: 36π cm^3

3. En una caja cúbica se ha colocado una esfera que calza perfectamente. Si la esfera tiene un volumen de 256 cm^3, ¿cuántos centímetros mide la arista de la caja?

a) 2 cm
b) 4 cm
c) 8 cm
d) 64 cm

Clave c)

4. Se necesita pintar el exterior de la cúpula de un telescopio, cuya forma es una semiesfera de 12 m de diámetro, ¿cuántos metros cuadrados mide el área que se debe pintar?

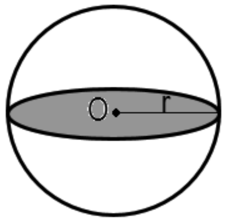
a) $24\ \pi\ m^2$
b) $48\ \pi\ m^2$
c) $72\ \pi\ m^2$
d) $288\ \pi\ m^2$

Clave c)

Actividad de síntesis (ticket de salida)

¿Cuál es el volumen de una esfera de radio igual a 2 m y centro O? trabaja con π expresado con su símbolo NO como número:

Solución: $\frac{32\pi}{3}$ m^3



Ministerio de Educación

Gobierno de Chile

¡Aprendo sin parar!

3° medio

Guía de ejercicios

Unidad 0: Matemática - N°5

Soluciones