Ministerio de Educación

Gobierno de Chile

4° medio

Unidad 0: Matemática - N°2

¡Aprendo sin parar!

Guía de ejercicios

Estimado estudiante:
Con la siguiente guía aprenderás a determinar cálculos y estimaciones que involucran operaciones con números combinando raíces con números racionales en diversos contextos. Al finalizar, habrás descubierto estrategias para resolver operaciones con números reales.

Objetivo de la clase: Resolver operaciones combinando raíces con números racionales en contextos cotidianos y matemáticos.

Soluciones

Actividad N°1

1. Observa las siguientes expresiones:

A. $9 + \sqrt{45}$

B. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

C. $3\sqrt[3]{27}$

¿Qué tipo de número representan las expresiones A, B y C, respectivamente?

Expresión A es un irracional

Expresión B es un irracional

Expresión C es un racional

2. Puedes reconocer alguna situación en un contexto cotidiano en la cual aparezcan este tipo de expresiones.

   Describe una situación que involucre expresiones aritméticas con números racionales e irracionales.

   Por ejemplo, en la medida de longitudes donde una de ellas sea un número irracional como el perímetro de un polígono o la circunferencia.

Actividad N° 2

Observa el siguiente ejemplo:

El producto entre un irracional por un racional distinto de cero, es siempre un irracional

Solución:
Supongamos que un **irracional "x"** por un racional $\frac{a}{b}$ es igual otro racional

Luego tenemos que $x \cdot \frac{a}{b} = \frac{m}{n} \quad / \cdot \frac{b}{a}$

$$x \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{m}{n} \cdot \frac{b}{a}$$

Finalmente $x = \frac{mb}{na}$

Como los productos mb y na son un producto de número enteros su resultado es un número entero luego, su cociente $\frac{mb}{na}$ es un número racional, lo que contradice las condiciones que tenía "x" en un principio **"x" es un irracional.**

Ejemplos:

1. $\frac{3}{4} \cdot \sqrt{5}$ = 0,75 · 2,236067977…
2. $\frac{1}{3} \cdot \sqrt{6} = \frac{2{,}449489743\ldots}{3} = 0{,}816496581\ \ldots$

a. Demuestra que la suma de un irracional y un racional distinto de cero es un irracional siempre.

Solución:
Supongamos que un **irracional "x"** más un racional $\frac{a}{b}$ es igual otro racional $\frac{m}{n}$

Luego tenemos que $x + \frac{a}{b} = \frac{m}{n} \quad / - \frac{a}{b}$

$$x + \frac{a}{b} - \frac{a}{b} = \frac{m}{n} - \frac{a}{b}$$

Finalmente $x = \frac{mb - an}{nb}$

Como los productos mb y an son un producto de número enteros su resultado es un número entero luego, su diferencia $mb - an$ también es un número entero. Por otra parte el cociente $\frac{mb-an}{nb}$ es un número racional pues es un cociente entre enteros, lo que contradice las condiciones que tenía "x" en un principio **"x" es un irracional.**

Da dos ejemplos:

1. $\frac{3}{4} + \sqrt{5}$ = 0,75 + 2,236067977….= 2,986067977…
2. 7+$\sqrt{8}$ = 7 + 2,828427125…= 9,828427125…

b. Demuestra con un contraejemplo que la suma de dos irracionales no siempre es un irracional De dos ejemplos:

1. $-\sqrt{5} + \sqrt{5} = 0 \ es\ un\ racional$

2. $\sqrt{2} + (1 - \sqrt{2}) = 1 \ es\ un\ racional$

c. Demuestra con un contraejemplo que el producto de dos irracionales no siempre es un irracional.

1. $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{9} = 3 \ es\ un\ racional$

2. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4 \ es\ un\ racional$

Actividad N° 3

1. Resuelve los siguientes productos usando las propiedades de las raíces:

a) $\sqrt{2}\,(3 + \sqrt{8}) = 3\sqrt{2} + \sqrt{16} = 3\sqrt{2} + 4$

b) $(1 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 2 - \sqrt{3} + 2\sqrt{3} - \sqrt{9} = 2 + \sqrt{3} - 3 = -1 + \sqrt{3}$

c) $(3 + \sqrt{2})(5 - \sqrt{3}) = 15 - 3\sqrt{3} + 5\sqrt{2} - \sqrt{6}$

d) $(4 + \sqrt{5})(1 + \sqrt{3}) = 4 - 4\sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{15}$

e) $(1 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3}) = 1 - \sqrt{9} = 1 - 3 = -2$

f) $(3 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2}) = 9 - \sqrt{4} = 9 - 2 = 7$

g) $(4 - \sqrt{5})(4 + \sqrt{5}) = 16 - \sqrt{25} = 16 - 5 = 11$

h) $(2 + \sqrt{2})(2 + \sqrt{2}) = 4 + 4\sqrt{2} + \sqrt{4} = 6 + 4\sqrt{2}$

2. Resuelve los siguientes problemas:

   a) Una escalera está apoyada sobre la fachada de un edificio. Si la escalera mide 10 m de longitud y el pie de la escalera está a 5 m de la pared, ¿a qué altura de la pared llega la escalera? Expresa el resultado con radicales extrayendo todos los factores posibles.

Solución: $5\sqrt{3}$

   b) La altura de un envase de leche de base cuadrada es el triple de la medida del lado de la base. Si el envase contiene 1,5 litros de leche ¿Cuáles son sus dimensiones de largo, alto y ancho?

Solución: largo = ancho = 7,93 cm y el alto = 23,81 cm o 23,79 cm si triplica el ancho 7,93.

   c) El volumen de una esfera es de 3053,63 cm^3, ¿cuál es la medida de su radio?

Solución: $\sqrt[3]{\frac{2290,2225}{\pi}} \approx 9\ cm$

Chequeo de la comprensión

Opera y simplifica las siguientes expresiones numéricas:

a) $\sqrt{3}(2 + 4\sqrt{2}) = 2\sqrt{3} + 4\sqrt{6}$

b) $(4 + \sqrt{7})(2 - \sqrt{7}) = 8 - 4\sqrt{7} + 2\sqrt{7} - 7 = 1 - 2\sqrt{7}$

c) $(5 + 2\sqrt{3})(5 - 2\sqrt{3}) = 25 - 4\sqrt{9} = 25 - 12 = 13$

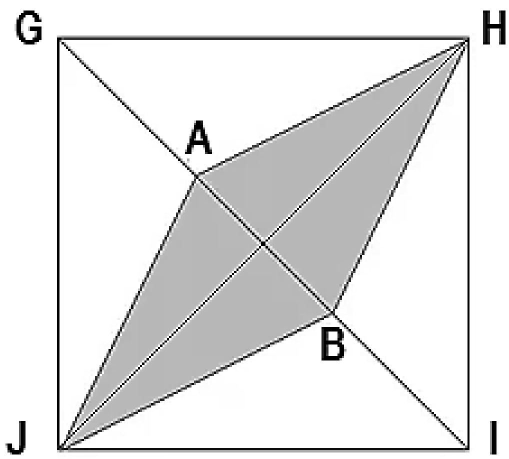
Nota: Importante considerar que los ejercicios b y c corresponden a un producto notable. “suma por diferencia”. ¡Lo que puede facilitar que obtengas el resultado!

Actividad de síntesis

Los puntos A y B dividen la diagonal del cuadrado GHIJ en tres partes iguales. Sí el área del cuadrado es 36 cm^2, ¿cuál es el valor exacto de la medida de área del rombo? (*recuerda que el área de un rombo es igual al producto de las diagonales*)

a) 16
b) 24
c) $8\sqrt{2}$
d) $12\sqrt{2}$

Clave B



Ministerio de Educación

Gobierno de Chile

¡Aprendo sin parar!

4° medio

Guía de ejercicios

Unidad 0: Matemática - N°2

Soluciones